BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

RİYAZİYYAT

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МОМЕНТА ПЕРВОГО ДОСТИЖЕНИЯ ВЫСОКОГО УРОВНЯ ПРОЦЕССАМИ ГАЛЬТОНА-ВАТСОНА

С.А.АЛИЕВ, В.А.АБДУРАХМАНОВ

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

soltanaliyev @yahoo.com

В работе доказываются усиленный закон больших чисел и интегральные предельные теоремы для момента первого достижения высокого уровня критическими и надкритическими процессами Гальтона-Ватсона. Найденное предельное распределение для нормированного момента первого выхода в случае критических процессов имеет явный аналитический вид, а в случае надкритических процессов оно выражается через предельное распределение самого надкритического процесса.

Пусть $Z_0 = 1, Z_1, Z_2, ..$ ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона с $0 < \mathrm{E}Z_1^2 < \infty$.

Рассмотрим момент первого достижения

$$\tau = \inf\{n \geq 0 : Z_n > c\}$$

уровня $c > 0$ процессом Z_n. Здесь будем считать, что $\inf(\varnothing) = \infty$.

В последнее время появилось несколько работ по исследованию граничных задач для случайных блужданий, описываемых цепей Маркова ([3], [4], [5]), а также ветвящимся процессами Гальтона-Ватсона ([1], [2]).

В настоящей работе доказываются интегральные предельные теоремы для момента первого выхода τ_c, под которыми понимаются любое утверждение о том, что при некоторых условиях относительно распределения процесса Z_n существуют случайная величина η и константы $a(c)$ и $b(c) > 0$, для которых

$$\frac{\tau_c - a(c)}{b(c)} \xrightarrow{d} \eta, \; c \to \infty, \tag{1}$$

где $\xrightarrow{d}$ означает сходимость по распределению.

В работе [1] доказана интегральная предельная теорема для τ_c, в которой найдено лишь преобразование Лапласа предельного распределения, которое выражается через модифицированной функции Бесселя первого рода.

Ниже доказываются интегральные предельные теоремы для момента первого достижения высокого уровня τ_c критическими и надкритическими процессами Гальтона-Ватсона. Найденное предельное распределение в случае критических процессов имеет простой вид, а в случае надкритических процессов оно выражается через предельное распределение самого надкритического процесса.

Сначала дадим некоторые сведения о процессах Гальтона-Ватсона. Известно [7], что процесс Z_n допускает представление

$$Z_n = \xi_1 + ... + \xi_{Z_{n-1}},$$

где ξ_k -одинаково распределенные целочисленные случайные величины, не зависящие между собой и от Z_{n-1} и представляющие собой число потомков k-й частицы в $(n-1)$-м поколении.

Положим $\mu = \mathrm{E}\xi_k$ - средняя величина потомства одной частицы. Тогда из свойства аддитивности условного математического ожидания имеем

$$\mathrm{M}(Z_n|Z_{n-1}) = \mu Z_{n-1} \tag{2}$$

и

$$MZ_n = \mu M\, Z_{n-1}$$

Следовательно $MZ_n = \mu^n$ и последовательность $T_n = \mu^{-n} Z_n$, $n \geq 1$ образует мартингал, так как из (2) вытекает

$$M(T_n|T_{n-1}) = \mu^{1-n} Z_{n-1} = T_{n-1}.$$

Сначала будем рассматривать случай $\mu = 1$, который называют критическим. Хорошо известно [6], что в этом случае вероятность продолжения (не вырождения) P_n процесса Z_n к моменту n имеет асимптотику при $n \to \infty$

$$P_n \sim \frac{1}{\sigma n},$$

где $\sigma = \dfrac{DZ_1}{2}$.

Отметим, что существование предельного распределения в (1) тесно связано с вопросом о существовании предельного распределения число частиц Z_n в $n-$м поколении при условии, что $Z_n > 0$. Как отмечено в [6], критический ветвящийся процесс имеет явный вид предельного распределения, причем нормировка Z_n определяется параметром $\sigma = \dfrac{DZ_1}{2} < \infty$.

Справедливы следующие предельные теоремы.

Теорема 1. Пусть $Z_n \uparrow$ при $n \to \infty$ почти наверное и $EZ_1 = \mu > 0$.

Тогда

1) $P(\tau_c < \infty) = 1,\ \forall c \geq 0$;

2) $\tau_c \xrightarrow{n.n} \infty$ при $c \to \infty$;

3) $\frac{\tau_c}{c} \xrightarrow{n.n} \frac{1}{\mu}$ при $c \to \infty$.

Эти свойства момента первого достижения τ_c доказываются по схеме доказательства теоремы 1 работы [5] в силу того, что рассматриваемый процесс Гальтона-Ватсона Z_n является однородной цепи Маркова.

Теорема 2. Пусть $\mu = \mathrm{E}Z_1 = 1$, и $0 < DZ_1 = 2\sigma < \infty$.

Предположим, что $Z_n \uparrow$ почти наверное на множестве $\{\omega : Z_n > 0\}$. Тогда для $x \ge 0$

$$P\left(\frac{\tau_c}{c} \le x \mid Z_n > 0\right) \to e^{-\frac{1}{\sigma x}} \quad \text{при } c \to \infty.$$

Теорема 3. Пусть $\mu = EZ_1 > 1$, $0 < DZ_1 < \infty$ и $Z_n \uparrow$ почти наверное на $\{\omega : Z_n > 0\}$. Тогда существует случайная величина T с непрерывной функцией распределения $F(x) = P(T \le x)$ при $x \ne 0$, такая, что

$$P\left(\frac{\mu^{\tau_c}}{c} \le x \middle| T > 0\right) \to \frac{1 - F(1/x)}{1 - F(0)} \quad \text{при } c \to \infty.$$

Доказательство теоремы 1. Заметим, что

$$P\left(\max_{0 \le k \le n} Z_k > c\right) = P(\tau_c \le n). \tag{3}$$

В силу монотонности процесса Z_n на $\{Z_n > 0\}$ имеем

$$P(Z_n > c | Z_n > 0) = P(\tau_c \le n | Z_n > 0). \tag{4}$$

Нам понадобиться следующий результат, сформулированный в виде леммы.

Лемма 1. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда $x \ge 0$

$$P\left(\frac{Z_n}{n} > x \middle| Z_n > 0\right) \to e^{-\frac{x}{\sigma}} \text{ при } n \to \infty.$$

Утверждение леммы 1 следует из предельной теоремы для критических процессов (см. [6], теорема 1.с.72).

Из (4) имеем

$$P(\tau_c \le n | Z_n > 0) = P\left(\frac{Z_n}{n} > \frac{c}{n} \middle| Z_n > 0\right). \tag{5}$$

Пусть теперь $n = n(c)$ при $c \to \infty$ меняется так, что

$$\frac{c}{n} \to x > 0, \quad n \sim \frac{c}{x}.$$

Тогда из (5) и леммы 1 следует, что

$$P\left(\frac{\tau_c}{c} \le \frac{1}{x} \middle| Z_n > 0\right) \to e^{-\frac{x}{\sigma}}$$

или

$$P\left(\frac{\tau_c}{c} \le x \middle| Z_n > 0\right) \to e^{-\frac{x}{cx}}.$$

Замечание 1. Теорема 1 показывает, что для критических процессов, величина τ_c имеет порядок $O(c)$ при $c \to \infty$.

Доказательство теоремы 2. Учитывая, что

$$P(\tau_c \le n) = P(Z_n > c)$$

имеем

$$P(\tau_c \le n) = P(T_n > \mu^{-n} c). \tag{6}$$

Нам понадобиться следующая

Лемма 2. Пусть $\mu = EZ_1 > 1$ и $0 < EZ_1^2 < \infty$. Тогда для $x \ge 0$

$$P\left(\frac{Z_n}{\mu^n} \le x\right) \to P(T \le x) = F(x) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Кроме того, условная функция распределения предельной случайной величины T при условии $T > 0$

$$K(x) = P(T \le x | T > 0) = \frac{F(x) - F(0)}{1 - F(0)}$$

абсолютно непрерывна, причем $MT = 1$, $DT = \dfrac{DZ_1}{\mu^2 - \mu}$.

Утверждение этой леммы следует из предельных теорем для ветвящихся процессов с одним типом частиц [[6] с.72-75].

Отметим, что согласно предельной теореме для надкритических процессов (см. [6], теорема 1.с.75) последовательность $T_n = \dfrac{Z_n}{\mu^n}$, $n \ge 0$ сходится в среднеквадратичном и с вероятностью 1 при $n \to \infty$ к случайной величине T, распределение которой $F(x)$ не вырождено (не сосредоточено в нуле) при $\mu > 1$. Поэтому из леммы 2 имеем при $n \to \infty$

$$P(T_n \le x | T > 0) \to P(T \le x | T > 0) = K(x). \tag{7}$$

Пусть в (6) при $c \to \infty$ $n = n(c)$ меняется так, что $\dfrac{c}{\mu^n} \to x > 0$.

Тогда учитывая, что $n \sim \log_\mu \dfrac{c}{x}$, из (6) и (7) находим

$$P\left(\tau_c \le \log_\mu \frac{c}{x} \middle| T > 0\right) \to 1 - K(x) \text{ при } c \to \infty$$

или

$$P\left(\frac{\mu^{\tau_c}}{c} \le x \middle| T > 0\right) \to 1 - K(1/x) \text{ при } c \to \infty.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 2.

Замечание 2. Из утверждения теоремы 2 следует, что для надкритических процессов величина τ_c имеет, грубо говоря, порядок $O(\ln c)$ при $c \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьев В.И. Процесс Гальтона-Ватсона при условии достижения высокого уровня. Теория вероятн. и ее примен. 2007, т.52, в.3, с.588-594.
2. Benmier J., Kerstin G. A random walk approach to Galton Watson trees // J. Theoretical Probab. 2000, v. 13, №3, p.777-792.
3. Боровков А.А. Асимптотика вероятности пересечения границы траекторией цепи Маркова. Экспоненциально убывающие хвосты скачков // Теория вероятн. и ее примен. 2003, т.48, в.2, с.254-273.
4. Melfi V.F. Nonlinear Markov renewal theory with statistical applications // Ann.Probab. 1992, v.20, №2, 753-771.
5. Rahimov F.H, Abdurakhmanov V.A. On limit behavior of linear first passage time of the Markov chain // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 2007, №27, p.69-74.
6. Севастьянов В.А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
7. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986, 508 с.

QALTON-VATSON PROSESLƏRİNİN YUXARI SƏVİYYƏYƏ BİRİNCİ DƏFƏ ÇATMA ANI ÜÇÜN İNTEQRAL LİMİT TEOREMLƏRİ

S.Ə.ƏLİYEV, V.Ə.ƏBDÜRƏHMANOV

XÜLASƏ

İşdə kritik və altkritik Qalton-Vatson proseslərinin yuxarı səviyyəyə birinci dəfə çatma anı üçün gücləndirilmiş böyük ədədlər qanunu və inteqral limit teoremləri isbat edilir. Normallaşdırılmış birinci dəfə kənara çıxma anı üçün limit paylanması tapılmışdır, belə ki, kritik proseslər halında o aşkar analitik şəkilə malikdir, altkritik proseslər halında isə o altkritik prosesin özünün limit paylanması ilə ifadə edilir.

THE INTEGRAL LIMIT THEOREMS OF FIRST CROSSING TIME OF HIGH LEVEL BY GALTON-WATSON PROCESS

S.A.ALIYEV, V.A.ABDURAKHMANOV

SUMMARY

The strong law of large numbers and integral limit theorems of high level by critical and uppercritical Galton-Watson processes are proved in the work. The limit distribution is established for the normalized first passage time, which in the case of critical processes has an obvious analytic form and in the case of an upparcritical process is expressed by the limit distribution of the upparcritical process itself.